Έστω $f:[\alpha,\beta]\to[\alpha,\beta]$ συνεχής

ΝΔΟ $\exists \xi\in[\alpha,\beta] : f(\xi)=\xi$.

ΛΥΣΗ

Έστω $g(x)=f(x)-x$, $\forall x\in[\alpha,\beta]$

- Η g συνεχής ως πράξεις συνεχών στο $[\alpha,\beta]$
- $g(\alpha)=f(\alpha)-\alpha$ και $g(\beta)=f(\beta)-\beta$.

Αλλά,
$$\alpha\le f(\alpha)\le\beta$$
$$\alpha\le f(\beta)\le\beta$$

Επομένως, $g(\alpha)\ge0$ και $g(\beta)\le0 \Rightarrow g(\alpha)\cdot g(\beta)\le 0$.

Περιπτώσεις

$g(\alpha)\cdot g(\beta)=0$ ή $g(\alpha)\cdot g(\beta)<0$

$g(\alpha)=0$ ή $g(\beta)=0$ Από Θ. Bolzano $\exists \xi\in(\alpha,\beta): g(\xi)=0 \Rightarrow$

$x=\alpha$ ή $x=\beta$. $\Rightarrow f(\xi)=\xi$.

Δηλ. $\exists$ ρίζες $\xi=\alpha$ και $\xi=\beta$.

Άρα, συναληθεύτηκε $\exists \xi\in[\alpha,\beta]: f(\xi)=\xi$.

2η Εφαρμογή (Θεώρημα Bolzano)

• Έστω συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής και τ/ω $f(\alpha)=f(\beta)$. Να αποδείξετε ότι:

$\exists x,y\in[\alpha,\beta]$ τέτοια ώστε

$|y-x| = \dfrac{\beta-\alpha}{2}$ και $f(x)=f(y)$

ΛΥΣΗ

Δίχως βλάβη της γενικότητας, έστω $y>x$

άρα $y-x>0$ και τότε η σχέση:

$$|y-x| = y-x = \frac{\beta-\alpha}{2} \Rightarrow y = \frac{\beta-\alpha}{2}+x$$

Θεωρούμε τη βοηθητική συνάρτηση:

$$g(x) = f\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) - f(x), \quad x\in\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$$

Η g συνεχής στο $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$

$$g(\alpha) = f\left(\alpha+\frac{\beta-\alpha}{2}\right) - f(\alpha) = f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)$$

$$g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\beta-\alpha}{2}\right) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = -g(\alpha)$$

Συνεπώς, έχουμε:

$$g(\alpha)\cdot g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = -\left[f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)\right]^2 \leq 0$$

Τότε, προκύπτουν δύο περιπτώσεις:

$g(\alpha)\cdot g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<0$

Άρα, από Θ. Bolzano

$\exists \xi\in\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ τ/ω

$g(\xi)=0 \Rightarrow f(\xi)=f\left(\xi+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

ή

$g(\alpha)\cdot g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=0 \Leftrightarrow$

$g(\alpha)=0$ ή $g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=0$

$\xi=\alpha$ ή $\xi=\frac{\alpha+\beta}{2}$

(ρίζες της)

Δηλαδή $\alpha<\xi<\dfrac{\alpha+\beta}{2} \Rightarrow \dfrac{\alpha+\beta}{2} < \xi+\dfrac{\beta-\alpha}{2} < \beta$

όπου για $x=\xi$ το $y=\xi+\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

και

για $x=y$, το $x=\xi+\dfrac{\alpha+\beta}{2}$